Двадцатый Российский фестиваль юных математиков

Второй тур. Лига стратегий.

1. Ответ: выиграет Вася. Первым ходом Вася положит отрезок $[7/32, 23/32]$. Петя обязан положить отрезок с концами в множестве $(23/32, 1]$. Вася же вторым своим ходом положит отрезок $[3/64, 11/64]$. После этого нетрудно заметить, что отрезок длины $1/16$ нельзя положить, а значит Петя проиграл.

2. Заметим, что углы $\angle ADL$ и ACL опираются на равные дуги, и поэтому равны. Значит, равные отрезки AC и AD симметричны относительно биссектрисы AL, откуда $CL = DL$. Далее, равны хорды $DL = PL$, так как они стягивают равные углы. Таким образом, $FC = PL = DL = CL$. Рассмотрим теперь третью вершину X правильного треугольника CLX (любую из двух). Тогда точка C — центр описанной окружности треугольника FXL, откуда $\angle LFX = \angle LCX/2 = 30°$. Аналогично, точка L — центр окружности CXD, откуда $\angle CDX = 30°$.

3. Ясно, что условие задачи равносильно следующему. Дан выпуклый многоугольник M и точка A внутри него. Точку A перенесли на вектор $-\overrightarrow{v}$, получив точку A'. Обозначим через R и R' максимальные расстояния от точек A и A' до вершин M соответственно. Тогда $3R' \geqslant R + |\overrightarrow{v}|$.

Докажем это. Заметим, что $R' \geqslant |\overrightarrow{v}|$. Это сразу следует из того, что луч $A'A$ пересекает границу многоугольника за точкой A (так как A лежит внутри многоугольника M). Пусть B такая вершина многоугольника M, что $|AB| = R$. По неравенству треугольника $|A'B|+|AA'| \geqslant |AB|$, откуда $R'+|\overrightarrow{v}| \geqslant R$. Получаем, что $3R' = R' + R' + R' \geqslant |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{v}| + R' \geqslant |\overrightarrow{v}| + R$.

4. Будем называть ребро в раскрашенном графе *плохим* если оно соединяет две вершины одного цвета, остальные ребра назовем хорошими. Рассмотрим среди всех раскрасок исходного графа G, в которых в каждом слое все вершины попарно разных цветов, ту, в которой наименьшее число плохих ребер (если таких несколько, то рассмотрим произвольную). Если плохих ребер в этой раскраске нет, то задача решена. Не умаляя общности будем считать, что есть плохое ребро r, соединяющее вершины цвета 1. Для произвольного $2 \leqslant i \leqslant n$, рассмотрим подграф G_i, состоящий из вершин цвета 1, вершин цвета i, *хороших* ребер между ними и ребра r. Любой цикл в любом таком графе является важным. Если для каждого i в графе G_i есть нечетный цикл, проходящий через r, то получили $n-1$ таких циклов, что противоречит условию. Значит, для некоторого i все циклы графа G_i, проходящие через ребро r, четны. Но все циклы в G_i, не проходящие через r, также четны, ибо на них чередуются вершины цветов 1 и i. Это означает, что G_i — двудольный граф, то есть все его вершины можно заново перекрасить в два цвета так, что все его ребра окажутся хорошими. Легко видеть, что от этой перекраски новых плохих ребер не появилось, в то время, как ребро r стало хорошим, то есть общее число плохих ребер уменьшилось.

5. Вспомним формулу $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Пусть $\cos 3\alpha = 1/2$, тогда $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha - 1 = 0$, а значит $2\cos\alpha$ — корень многочлена $x^3 - 3x - 1$. Таким образом, корни многочлена — $x_1 = 2\cos 140°$, $x_2 = 2\cos 100°$, $x_3 = 2\cos 20°$. Поэтому нам достаточно доказать, что $4(\cos^2 20° - \cos^2 100°) = 2(\cos 20° - \cos 140°)$. Применяя формулу косинуса удвоенного угла получаем $4(\cos^2 20° - \cos^2 100°) = 2(\cos 40° - \cos 200°) = 2(\cos 20° - \cos 140°)$.

6. Пусть произведение P некоторых k подряд идущих чисел является точной m-ой степенью. По условию, среди них найдется число, взаимно простое со всеми остальными, и тогда оно тоже будет точной m-ой степенью, например, x^m. Если $x = 1$, то наше произведение равно $k!$ и не может являться m-й степенью при $m > k$ (например, потому, что количество двоек в его разложении не превосходит k). Пусть теперь $x > 1$. Тогда числа $x^m \pm x$ имеют общий делитель с x^m, и потому не попадают в данный промежуток из k чисел. Это значит, что $x \geqslant (k-1)/2$.

Заметим, что $P \neq x^{mk}$, ибо все множители, кроме x^m, взаимно просты с x. Докажем теперь, что $(x^k - 1)^m < P < (x^k + 1)^m$ (из этого будет следовать, что P — не точная m-я степень). В самом деле, все числа зажаты между $x^m - k$ и $x^m + k$, поэтому $(x^m - k)^k < P < (x^m + k)^k$. Осталось проверить, что $(x^m - k)^k > (x^k - 1)^m$ и $(x^m + k)^k < (x^k + 1)^m$. Поделим первое неравенство на x^{km}, получим $(1 - \frac{k}{x^m})^k > (1 - \frac{1}{x^k})^m$. Так как $m > k$, это неравенство следует из $1 - \frac{k}{x^m} > 1 - \frac{1}{x^k}$, то есть $x^{m-k} > k$. Это очевидно, ибо уже $x^2 \geqslant (k-1)^2/4 > k$. Второе неравенство доказывается абсолютно аналогично.

7. Перепишем неравенство следующим образом

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} \geqslant \frac{3}{2},$$

или

$$(\star) = \sum \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, несложно получить

$$(\star) \geqslant \frac{4(a+b+c)^2}{\sum (a+b)^2 + 2\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}} = \frac{36}{\sum (a+b)^2 + 2\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}.$$

Осталось доказать, что
$$\sum(a+b)^2+2\sum\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\leqslant 24.$$
Так как
$$12-\sum(a+b)^2=\frac{4}{3}(a+b+c)^2-\sum(a+b)^2=-\frac{1}{3}\sum(a-b)^2,$$
а
$$12-2\sum\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=2\sum\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2},$$
то это неравенство равносильно неравенству
$$\sum(a-b)^2\left(\frac{6}{a^2+b^2}-1\right)\geqslant 0.$$
Предполагая, что $a\geqslant b\geqslant c$, несложно доказать это неравенство при условии, что $a^2+b^2\leqslant 6$. Разберем теперь случай, когда $a^2+b^2\geqslant 6$. В этом случае получаем, что $\frac{1}{a^2+b^2+2}\leqslant\frac{1}{8}$, и
$$\frac{1}{a^2+c^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}\leqslant\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}\leqslant\frac{1}{8-b^2}+\frac{1}{b^2+2}\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$
(так как $0\leqslant b^2\leqslant\frac{9}{4}$). Поэтому
$$\sum\frac{1}{a^2+b^2+2}\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$
8. Обозначим замощение из условия через A. Заметим, что всего существует 16 замощений клетчатой плоскости прямоугольниками 2×4, в каждой из которых любые два прямоугольника либо не пересекаются, либо имеют общую сторону. Пусть B — произвольное из этих замощений. Если какой-то из прямоугольников замощения B содержит L -тетрамино θ замощения A, то разобьем этот прямоугольник на два L -тетрамино так, чтобы ни одно из них не совпадало с θ. Разбив оставшиеся прямоугольники произвольным образом на два L -тетрамино каждый получим замощение B' клетчатой плоскости, в котором ни какое L -тетрамино не совпадает ни с каким L -тетрамино замощения A. Также ясно, что все полученные замощения имеют попарно не совпадающие L -тетрамино, так как у любых двух таких L -тетрамино различаются описанные вокруг них прямоугольники.

9. Ясно, что точка D лежит на биссектрисе угла EBF. Заметим, что $\angle EDF=90^\circ-\angle EBF/2$, поэтому точка D — центр вневписанной окружности треугольника EBF, а K — точка касания этой окружности со стороной EF. Тогда точка L — точка касания его вписанной окружности со стороной EF. При гомотетии с центром в B, переводящей вписанную окружность во вневписанную, точка L переходит в точку K' на вневписанной окружности, диаметрально противоположную точке K. Значит, точки B, L и K' лежат на одной прямой. Но тогда прямая MD является средней линией треугольника $KK'L$, а потому параллельна прямой BL, что и требовалось доказать.

10. Если какие-то два из чисел a, b, c равны, то $a=b=c$. Поэтому допустим, что все три числа различны. Имеем: $a^n-b^n=k(c-b)$, $b^n-c^n=k(a-c)$ и $c^n-a^n=k(b-a)$, откуда
$$\frac{a^n-b^n}{b-a}\cdot\frac{b^n-c^n}{c-b}\cdot\frac{c^n-a^n}{a-c}=k^3. \qquad (\star)$$
Если n нечетно, то слева стоит отрицательное число. Значит, n четно. Ясно, что какие-то два из чисел a, b, c — одной четности, пусть это числа a и b. Тогда множитель $(a^n-b^n)/(b-a)$ четен, что противоречит нечетности k.

Второй тур. Лига тактик.

1. См. решение задачи 1 из лиги стратегий.

2. Разобьем плоскость на горизонтальные прямоугольники 2×3 естественным способом. Каждый прямоугольник разбиения мы можем разбить на два уголка двумя способами. Выберем в каждом прямоугольнике такое разбиение, чтобы никакой выбранный уголок не содержался в исходном разбиении. Так мы получим одно требуемое разбиение. Теперь сдвинем сетку из прямоугольников 2×3 на одну клетку вверх, и в ней повторим наше рассуждение. Мы получим второе разбиение плоскости на уголки, не имеющее общих уголков с исходным. Друг с другом эти разбиения не имеют общих уголков, так как прямоугольники исходной и сдвинутой сетки пересекаются по прямоугольникам 1×3, а значит общих уголков у них быть не может.

3. Обозначим $a^2+2nb^2=c^2$. Тогда $a^2+nb^2=\frac{a^2+c^2}{2}=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$. Осталось заметить, что из первого равенства следует, что a и c одной четности.

4. Если в исходной системе авиалиний был город, связанный авиалиниями со всеми другими, то в новой системе не будет ни одной авиалинии. Если же в исходной системе авиалиний был город, из которого не выходила ни одна авиалиния, то в новой системе соединим любые два города авиалинией. В остальных случаях подойдет любая из двух приведенных систем.

5. Пусть BK — биссектриса угла ABD (точка K на стороне AD), и, аналогично, BL — биссектриса угла CBD. Тогда из условия следует, что $BKDL$ параллелограмм, и значит BD делит KL пополам. С другой стороны из свойства биссектрисы следует, что $\frac{AK}{KD} = \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{CL}{LD}$. По теореме Фалеса получаем, что $KL \| AC$, то есть DB делит пополам и отрезок AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, мы получаем, что BD — серединный перпендикуляр к AC. Значит $DA = DC$, что и требовалось доказать.

6. Рассмотрим вписанный в эту окружность правильный 15-угольник. Его вершины разбиваются на пять групп, образующих правильные треугольники, значит среди них не менее 10 красных. С другой стороны его вершины разбиваются на три группы, образующие правильные пятиугольники. Если в каждой из них не более трех красных, то всего красных не более 9. Это противоречие и доказывает утверждение задачи.

7. Пусть сначала $x \geqslant 0$. Если $x \geqslant 2$, то $[x[x]] \geqslant 4$, а если $[x] = 0$, то $[x[x]] = 0$, все эти варианты не подходят. Если $[x] = 1$ (то есть $x \in [1, 2)$), то $x[x] = x$, значит $[x[x]] = 1$, то есть все такие x являются решением. Теперь пусть $x < 0$. Если $[x] = -1$ (то есть $x \in [-1, 0)$), то $x[x] = -x \in (0, 1]$. Из всех таких x подходит лишь $x = -1$. Если же $x < -1$, то $[x] \leqslant -2$, откуда $x[x] \geqslant 2$ и $[x[x]] \geqslant 2$, что нам не подходит. Таким образом, ответом является множество $\{-1\} \cup [1, 2)$.

8. Заметим, что из условия следует, что $(a-1)(b-1) \geqslant 0$, откуда имеем $ab+1 \geqslant a+b$ и аналогичные два неравенства для двух других пар переменных. Теперь применим неравенство о средних для трех чисел к левой части данного неравенства. Имеем:

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1+ab}{b+c} \cdot \frac{1+bc}{c+a} \cdot \frac{1+ca}{a+b}} = 3\sqrt[3]{\frac{1+ab}{a+b} \cdot \frac{1+bc}{b+c} \cdot \frac{1+ca}{a+c}} \geqslant 3.$$

9. См. решение задачи 9 из лиги стратегий.

10. См. решение задачи 10 из лиги стратегий.